EXERCICES SUR LES SYSTEMES NUMERIQUES

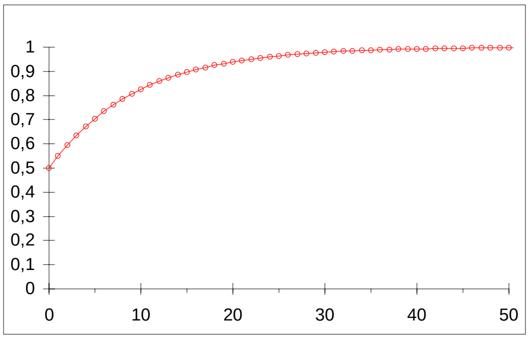
Exercice 11

1) Un système numérique effectue le calcul récurrent $y(n) = 0{,}5x(n) - 0{,}4x(n-1) + 0{,}9y(n-1)$ où $x(n)$ et $y(n)$ représentent respectivement les fonction numériques entrantes et sortantes. Soient $Y(z)$ et $X(z)$ les transformées de ces fonctions. Calculer $Y(z)$ en fonction de $X(z)$.

2) Calculer les valeurs initiale et finale de $y(n)$ lorsque $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

3) Calculer et tracer $y(n)$ dans le cas où $x(n)$ est égale à l'échelon unité $u(n)$.

4) Montrer que l'équation récurrente ci-dessus peut simuler un système analogique d'équation différentielle $x(t) + R_2C\frac{dx(t)}{dt} = y(t) + C(R_1 + R_2)\frac{dy(t)}{dt}$ (x est l'entrée, y est la sortie) où $R_1C = 5\text{ ms}$ et $R_2C = 4\text{ ms}$ si la période d'échantillonnage est T_e = 1 ms.



1) $Y(z) = \frac{0{,}5 - 0{,}4z^{-1}}{1 - 0{,}9z^{-1}} X(z)$

2) $Y(z) = \frac{0{,}5 - 0{,}4z^{-1}}{1 - 0{,}9z^{-1}} \frac{z}{z-1}$.

Valeur initiale $y(0) = Y(\infty) = 0{,}5$

Valeur finale $y(\infty) = \left[\frac{0{,}5 - 0{,}4z^{-1}}{1 - 0{,}9z^{-1}} z\right]_{z=1} = 1$

3) $Y(z) = \frac{0{,}5z^2 - 0{,}4z}{(z-0{,}9)(z-1)} = \frac{z}{z-1} - \frac{0{,}5z}{z-0{,}9}$

et donc $y(n) = \left(1 - \frac{1}{2}0{,}9^n\right) u(n)$

4) $x(n) + R_2C\frac{x(n) - x(n-1)}{T_e} = y(n) + C(R_1 + R_2)\frac{y(n) - y(n-1)}{T_e}$

$$y(n) = \frac{\left(1 + \frac{R_2C}{T_e}\right)x(n) - \frac{R_2C}{T_e}x(n-1) + \frac{C(R_1+R_2)}{T_e}y(n-1)}{1 + \frac{C(R_1+R_2)}{T_e}} = \frac{5x(n) - 4x(n-1) + 9y(n-1)}{10}$$

Exercice 12

1) Donner l'équation de récurrence d'un système numérique échantillonné destiné à remplacer un système analogique d'équation différentielle $x(t) = 2y(t) + \tau\frac{dy(t)}{dt}$ (x est l'entrée, y est la sortie).

2) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système numérique.

3) Dans le cas où $\tau = 2\,T_e$, trouver l'expression générale de la réponse du système numérique à un échelon unité.

4) Vérifier la validité de cette expression en calculant directement les 5 premiers échantillons de cette réponse.

---

1) $x(t) = 2y(t) + \tau\dfrac{dy(t)}{dt}$ $\quad x(n) = 2y(n) + \tau\dfrac{y(n) - y(n-1)}{T_e}$

$$y(n) = \frac{1}{2+\frac{\tau}{T_e}}x(n) + \frac{1}{1+2\frac{T_e}{\tau}}y(n-1)$$

2) $$H(z) = \frac{\frac{1}{2+\frac{\tau}{T_e}}}{1-\frac{1}{1+2\frac{T_e}{\tau}}z^{-1}} = \frac{1}{2+\frac{\tau}{T_e}}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{1+2\frac{T_e}{\tau}}}$$

3) si $\tau = 2T_e$, $\quad H(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad Y_u(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)$

$$y_u(n) = \frac{1}{2}u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)u(n)$$

4) L'équation de récurrence est $y(n) = \dfrac{x(n)}{4} + \dfrac{y(n-1)}{2}$

N	0	1	2	3	4
$y_u(n)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{32} = \frac{15}{32}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{64} = \frac{31}{64}$
éq. Réc.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$	$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$	$\frac{1}{4} + \frac{7}{32} = \frac{15}{32}$	$\frac{1}{4} + \frac{15}{64} = \frac{31}{64}$
	0,25	0,375	0,4375	0,46875	0,484375

Exercice 13

On considère un système numérique échantillonné de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{2z^2}{15z^2-8z+1}$.

1) Donner les valeurs initiale et finales de ses réponses impulsionnelle et indicielle.

En utilisant la méthode des résidus calculer :

2) sa réponse impulsionnelle complète.

3) sa réponse indicielle complète.

---

1) $H(0)=\frac{2}{15}$, $H(\infty)=0$, $Y_u(0)=\frac{2}{15}$, $Y_u(\infty)=\frac{1}{4}$

$$H(z)=\frac{2z^2}{15z^2-8z+1}=\frac{2z^2}{(3z-1)(5z-1)}=\frac{2}{15}\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)}$$

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{3}}=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left\{z^{n-1}\frac{2}{15}\frac{z^2}{z-\frac{1}{5}}\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\frac{2}{15}\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{5}}=\lim_{z\to\frac{1}{5}}\left\{z^{n-1}\frac{2}{15}\frac{z^2}{z-\frac{1}{3}}\right\}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\frac{2}{15}\frac{1}{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}=-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$h(n)=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]u(n)$$

2) $$Y_u(z)=\frac{2}{15}\frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)(z-1)}$$

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{3}}=\lim_{z\to\frac{1}{3}}\left\{z^{n-1}\frac{2}{15}\frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{5}\right)(z-1)}\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\frac{2}{15}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{5}}=\lim_{z\to\frac{1}{5}}\left\{z^{n-1}\frac{2}{15}\frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)}\right\}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}\frac{2}{15}\frac{1}{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}-1\right)}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{R}_1=\lim_{z\to1}\left\{z^{n-1}\frac{2}{15}\frac{z^3}{\left(z-\frac{1}{5}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\right\}=\frac{2}{15}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{4}$$

$$y_u(n)=\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-\frac{2}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u(n)=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u(n)$$

Exercice 14

Un système numérique a été programmé selon l'équation récurrente suivante :

$$y(n) = 20\,x(n) - 19\,x(n-1) + y(n-1)$$

1) Utiliser cette équation pour calculer les réponses impulsionnelle et indicielle.
2) Calculer sa fonction de transfert $H(z)$.
3) En déduire ses zéros et ses pôles.
4) Retrouver les réponses impulsionnelle et indicielle à partir de la fonction de transfert.
5) Quelle fonction numérique simple est réalisée par ce système.

$y(n) = 20\,x(n) - 19\,x(n-1) + y(n-1)$

1)

impulsionnelle.	20	1	1	1	1	1
indicielle	20	21	22	23	24	25

2) $H(z) = \dfrac{20 - 19z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \dfrac{20z - 19}{z - 1} = 20\dfrac{z - 0{,}95}{z - 1}$

3) Zéro = 0,95, pôle = 1.

4) $H(z) = 20\dfrac{z}{z-1} - 19\dfrac{z}{z-1}z^{-1}$ et donc $h(n)$ = 20 $u(n)$ - 19 $u(n\text{-}1)$

5) $H(z) = \dfrac{20z - 20 + 1}{z - 1} = 20 + \dfrac{1}{z - 1}$ et donc $y(n) = 20x(n) + \sum_{-\infty}^{n-1} x(i)$

$h(n) = 20\ \delta(n) + u(n\text{-}1)$ $y_u(n) = 20\ u(n) + \mathrm{n}\ u(n)$

Exercice 15

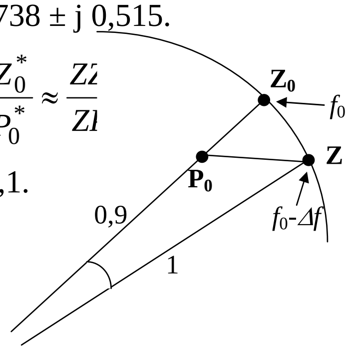
Un système numérique est caractérisé par la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1 - 1{,}64z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1{,}476z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$$

1) Trouver et placer ses zéros et ses pôles dans le plan complexe.
2) En déduire le diagramme de Bode.
3) Calculer de façon approchée la largeur de bande.
4) Que représente la valeur particulière $H(1)$?
5) Calculer la réponse impulsionnelle.

$H(z) = \dfrac{1 - 1{,}64z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1{,}476z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$ de la forme : $H(z) = \dfrac{z^2 - 2\cos\theta\, z + 1}{z^2 - 2\rho\cos\theta\, z + \rho^2}$

1) ρ = 0,9;, θ = 0,609; f/f_e = 0, 097; z_0 = 0,82 ± j 0,572; p_0 = 0,738 ± j 0,515.



2) Réjecteur à la fréquence f_0/f_e = 0,97. En effet $|H(z)| = \dfrac{ZZ_0 ZZ_0^*}{ZP_0 ZP_0^*} \approx \dfrac{ZZ}{ZP}$

3) On écarte f de f_0 jusqu'à ce que la corde soit égale à 1-0,9=0,1.
En confondant P_0Z_0Z avec un trianble rectangle on a :

$P_0Z_0 = Z_0Z = 0{,}1$ et $P_0Z = 0{,}1\sqrt{2}$ et donc $|H(z)| \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2\pi\dfrac{\Delta f}{f_e} = 0{,}1$ et finalement $\dfrac{\Delta f}{f_e} = 0{,}0159$, $\dfrac{f_1}{f_e} = 0{,}081$, $\dfrac{f_2}{f_e} = 0{,}113$

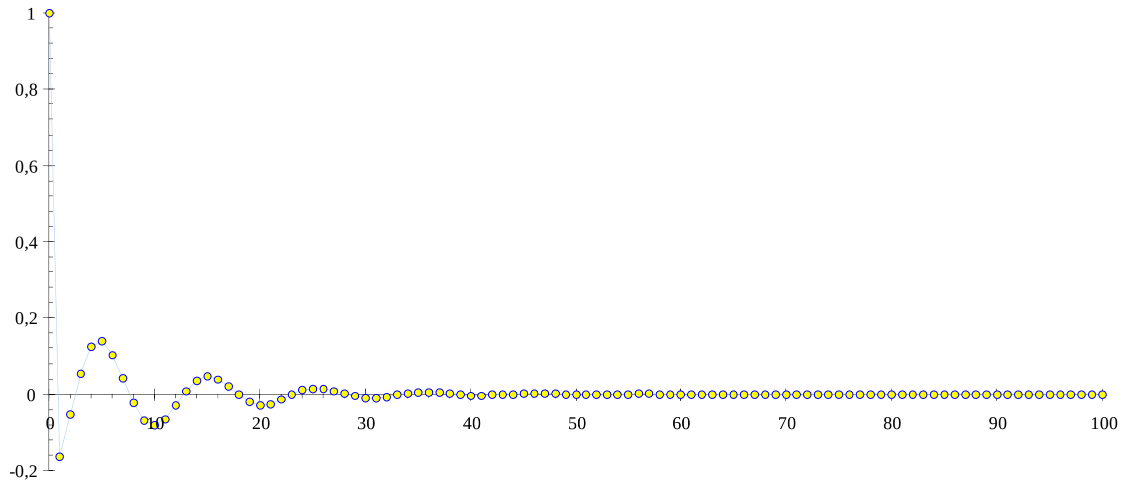
4) Le gain en continu soit $\frac{2 - 1{,}64}{1{,}81 - 1{,}476} = 1{,}078$.

5) $h(n) = \frac{\rho^n}{\sin\theta}\sin[(n+1)\theta]u(n) - 2\cos\theta\frac{\rho^{n-1}}{\sin\theta}\sin[n\theta]u(n-1) + \frac{\rho^{n-2}}{\sin\theta}\sin[(n-1)\theta]u(n-2)$

$h(n) = \frac{\rho^n}{\sin\theta}\left\{\sin[(n+1)\theta]u(n) - \frac{2\cos\theta}{\rho}\sin(n\theta)u(n-1) + \frac{1}{\rho^2}\sin[(n-1)\theta]u(n-2)\right\}$

Pour n>1 $h(n) = -\frac{\rho^{n-2}}{\sin\theta}(1-\rho)\left\{(1+\rho)\sin\theta\cos(n\theta) - (1-\rho)\cos\theta\sin(n\theta)\right\}$

de la forme $h(n) = -k\rho^{n-2}\cos(n\theta - \varphi)$



Exercice 16

Un filtre numérique a comme réponse impulsionnelle : $h(n) = 0{,}8^n\cos(0{,}1435\pi n)\,u(n)$.

1) Calculer sa fonction de transfert $H(z)$ sachant que $\cos(0{,}1435\pi) = 0{,}9$.

2) En déduire sa relation de récurrence.

3) Calculer sa fonction de transfert harmonique $H(\omega)$. Donner son expression approchée quand $f \ll f_e$ (dans ces conditions $\cos(\omega T_e) \approx 1$ et $\sin(\omega T_e) \approx \omega T_e$). A quel type de filtre analogique s'apparente-t-elle ?

---

1) $h(n)$ est de la forme $h(n) = b^n\cos(an)\,u(n)$ avec b=0,8 et $\cos a$=0,9. Sa transformée en z est

$$H(z) = \frac{1 - b\cos a\, z^{-1}}{1 - 2b\cos a\, z^{-1} + b^2 z^{-2}} = \frac{1 - 0{,}72\, z^{-1}}{1 - 1{,}44\, z^{-1} + 0{,}64 z^{-2}}$$

2) $$H(z) = \frac{1 - 0{,}72\, z^{-1}}{1 - 1{,}44\, z^{-1} + 0{,}64 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

et donc $x(n) - 0{,}72\,x(n-1) = y(n) - 1{,}44\,y(n-1) + 0{,}64\,y(n-2)$.

D'où la relation de récurrence : $y(n) = x(n) - 0{,}72\,x(n-1) + 1{,}44\,y(n-1) - 0{,}64\,y(n-2)$.

3) $$H(\omega) = \frac{1 - 0{,}72\, e^{-j\omega T_e}}{1 - 1{,}44\, e^{-j\omega T_e} + 0{,}64\left(e^{-j\omega T_e}\right)^2}$$

$$H(\omega) \approx \frac{1-0{,}72+j0{,}72\ \omega T_e}{1-1{,}44+j1{,}44\ \omega T_e+0{,}64\left(1-\omega T_e\right)^2}=\frac{0{,}28+j0{,}72\ \omega T_e}{0{,}2+j0{,}16\ \omega T_e-0{,}64\ \omega^2 T_e^2}$$

$$H(\omega)=1{,}4\frac{1+j2{,}571\,\omega T_e}{1+j0{,}8\,\omega T_e-3{,}2\ \omega^2 T_e^2}$$

$$\varpi_0=\frac{1}{\sqrt{3{,}2}\ T_e}=\frac{0{,}559}{T_e}$$

$$m=\frac{0{,}4}{\sqrt{3{,}2}\ T_e}=0{,}223$$