EQUIVALENT NUMERIQUE DE FILTRES ANALOGIQUES SIMPLES

Passe Haut du premier ordre

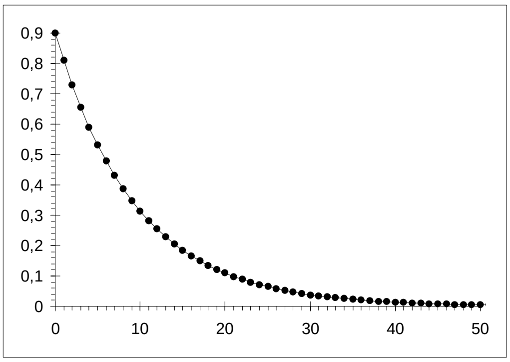
Tracer la réponse indicielle d'un système dont l'équation de récurrence est:

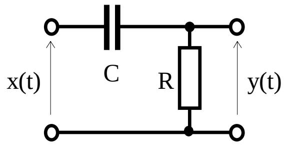
y(n)=0,9 [x(n) - x(n-1) + y(n-1)]

Montrer qu'elle la traduction numérique d'un filtre analogique passe haut du premier ordre dont on calculera la constante de temps.

Vérifier que $y(n) = He^{jn\omega Te}$ satisfait l'équations de récurrence précédente si $x(n) = e^{jn\omega Te}$ (échantillonnage de $e^{j\omega t}$). Montrer que H est un nombre complexe fonction de ω.

$y(0)=0{,}9$ $y(1)=0{,}9^2$ $y(2)=0{,}9^3$ $y(3)=0{,}9^4$ $y(4)=0{,}9^5$ $y(5)=0{,}9^6$ $y(n)=0{,}9^{n+1}$





$$C\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{y}{R}$$

et donc $$RC\frac{d(x)}{dt} = y + RC\frac{d(y)}{dt}$$

Remplaçons les dérivées par des accroissements finis :

$$RC\frac{x(n)-x(n-1)}{T_e} = y(n) + RC\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}$$

$$y(n) = \frac{\frac{RC}{T_e}}{1+\frac{RC}{T_e}}\left(x(n)-x(n-1)+y(n-1)\right)$$

Soit finalement :

$\frac{RC}{T_e} = 0{,}9\left(1+\frac{RC}{T_e}\right)$ et donc $\frac{RC}{T_e} = 9$. Le système correspond à une constante de temps égale à 9 fois la période d'échantillonnage.

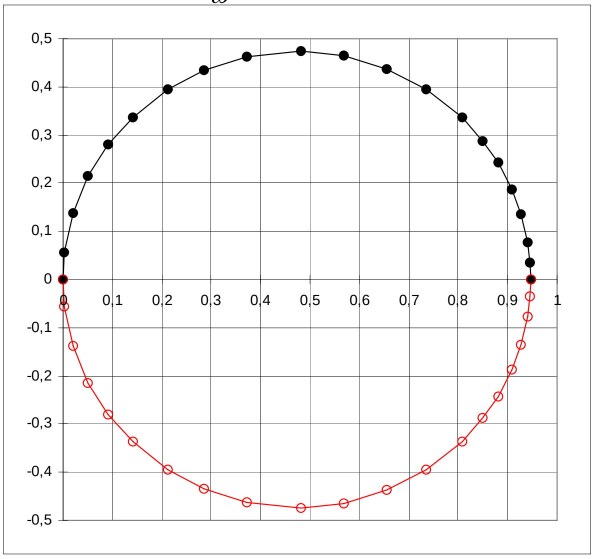
$y(n) = a\left(x(n)-x(n-1)+y(n-1)\right)$ donne :

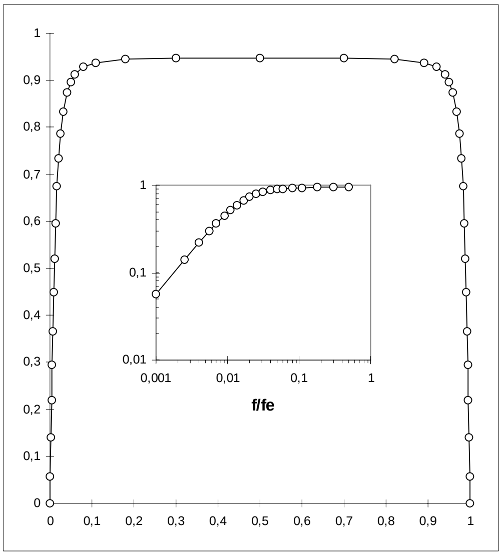
$He^{jn\omega T_e} = a\left(e^{jn\omega T_e} - e^{-j\omega T_e}e^{jn\omega T_e} + He^{-j\omega T_e}e^{jn\omega T_e}\right)$ soit $H = a\left(1-e^{-j\omega T_e} + He^{-j\omega T_e}\right)$

$$H = \frac{a\left(1-e^{-j\omega T_e}\right)}{1-ae^{-j\omega T_e}} = \frac{a\left(1-\cos\omega T_e + j\sin\omega T_e\right)}{1-a\cos\omega T_e + ja\sin\omega T_e}$$

$$\underset{\omega T_e\to 0}{H} = \frac{ja\,\omega T_e}{1-a+ja\omega T_e} = \frac{1}{1-j\frac{1-a}{a\omega T_e}} = \frac{1}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$$ avec $\omega_0 = \frac{1-a}{aT_e} = \frac{1}{RC}$

$$\underset{\omega T_e \to 0}{H} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$



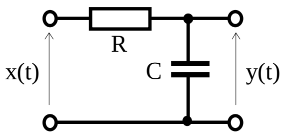


$y(n)$=0,9 $x(n)$ - 0,9 $x(n$-1) + 0,9 $y(n$-1)

Passe Bas du premier ordre

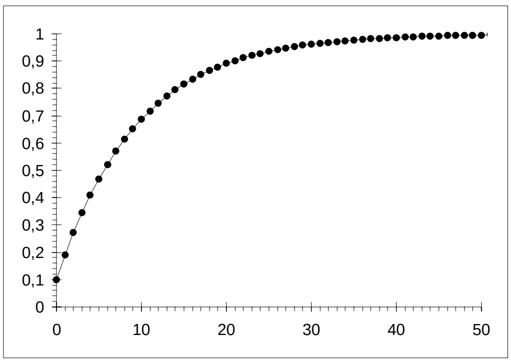
Trouver l'équation de récurrence d'un système numérique simulant un filtre passe bas du premier ordre. Tracer sa réponse indicielle.

Vérifier que $y(n) = He^{jn\omega Te}$ satisfait l'équations de récurrence si $x(n) = e^{jn\omega Te}$. Calculer $H(\omega)$.



$$\frac{x-y}{R} = C\frac{dy}{dt}$$ et donc $$x = y + RC\frac{d(y)}{dt}$$

Remplaçons les dérivées par des accroissements finis :



$$x(n) = y(n) + RC\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}$$. Soit

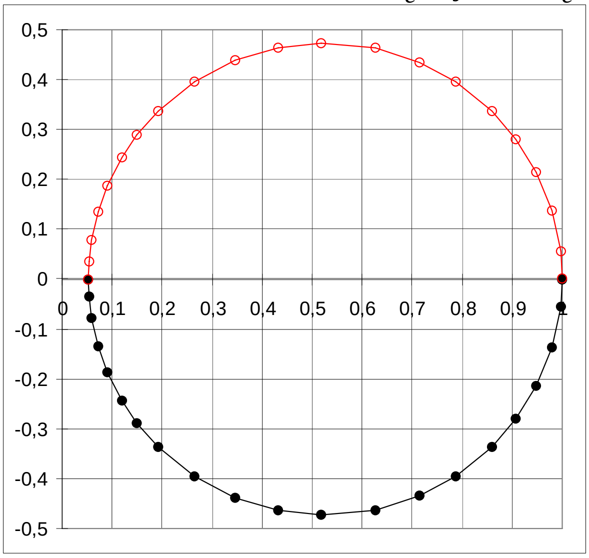
finalement : $$y(n) = \frac{x(n)}{1+\frac{RC}{T_e}} + \frac{\frac{RC}{T_e}}{1+\frac{RC}{T_e}}\, y(n-1)$$

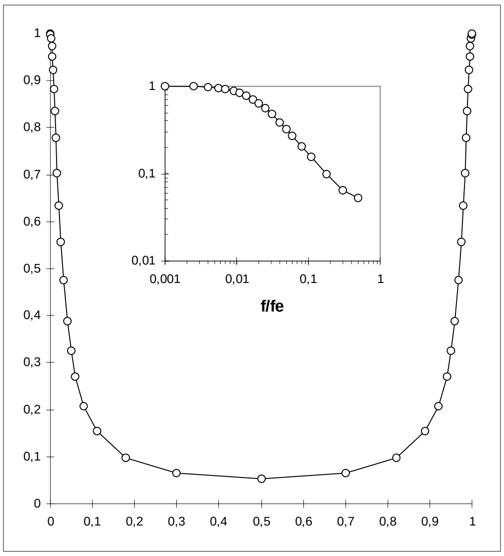
Pour $\frac{RC}{T_e} = 9$, il vient y(n)=0,1 x(n) + 0,9 y(n-1).

$y(n) = a\,x(n) + b\,y(n-1)$ donne :

$$H = a + b\,H e^{-j\omega T_e}$$

$$H = \frac{a}{1-be^{-j\omega T_e}} = \frac{a}{1-b\cos\omega T_e + jb\sin\omega T_e}$$





$y(n)$=0,1 $x(n)$ + 0,9 $y(n$-1)

$$\underset{\omega T_e \to 0}{H} = \frac{a}{1-b+jb\omega T_e} = \frac{\frac{a}{1-b}}{1+j\frac{b}{1-b}\omega T_e} = \frac{a}{1-b}\,\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1-b}{bT_e} = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad \frac{a}{1-b} = 1$$

$$\underset{\omega T_e \to 0}{H} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Passe Bande du second ordre

Trouver l'équation de récurrence d'un système numérique simulant un filtre passe bande analogique du second ordre d'équation différentielle : $\frac{1}{\omega_o}\frac{dy}{dt} + \frac{Q}{\omega_o^2}\frac{d^2y}{dt^2} + Q\,y = \frac{1}{\omega_o}\frac{dx}{dt}$. Tracer sa réponse indicielle si f_e/f_0=30 et Q=5.

Vérifier que $y(n) = He^{jn\omega Te}$ satisfait l'équation de récurrence si $x(n) = e^{jn\omega Te}$. Calculer $H(\omega)$.

$$\frac{1}{\omega_o}\,\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e} + \frac{Q}{\omega_o^2}\,\frac{\frac{y(n)-y(n-1)}{T_e} - \frac{y(n-1)-y(n-2)}{T_e}}{T_e} + Q\,y(n) = \frac{1}{\omega_o}\,\frac{x(n)-x(n-1)}{T_e}$$

$$y(n)\left[Q+\frac{1}{\omega_o T_e}+\frac{Q}{\omega_o^2 T_e^2}\right] - y(n-1)\left[\frac{1}{\omega_o T_e}+\frac{2Q}{\omega_o^2 T_e^2}\right] + y(n-2)\left[\frac{Q}{\omega_o^2 T_e^2}\right] = \frac{x(n)-x(n-1)}{\omega_o T_e}$$

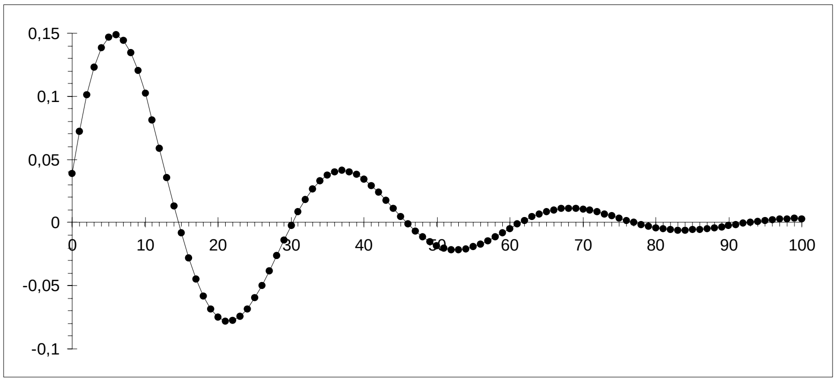
$$y(n)=\frac{x(n)-x(n-1)+\left(1+\frac{2Q}{\omega_0 T_e}\right)y(n-1)-\frac{Q}{\omega_0 T_e}y(n-2)}{1+Q\omega_0 T_e+\frac{Q}{\omega_0 T_e}}$$

Si f_e/f_0=30 et Q=5, $\frac{1}{\omega_0 T_e}=\frac{30}{2\pi}=4{,}775$; $\frac{Q}{\omega_0 T_e}=\frac{150}{2\pi}=23{,}873$; $Q\omega_0 T=\frac{\pi}{3}=1{,}047$

$1+Q\omega_0 T_e+\frac{Q}{\omega_0 T_e}=$ 25,92 et finalement :

a_{x0} = 0,0386	a_{x1} = - 0,0386	a_{y1} = 1,881	a_{y2} = - 0,921

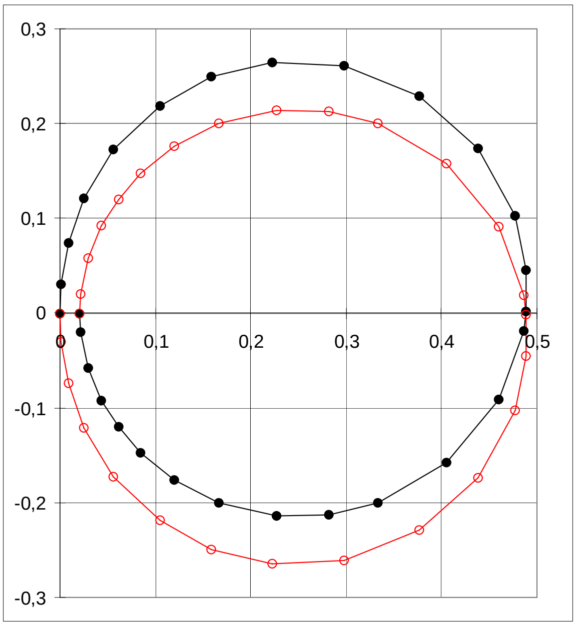
La figure suivante donne sa réponse indicielle.

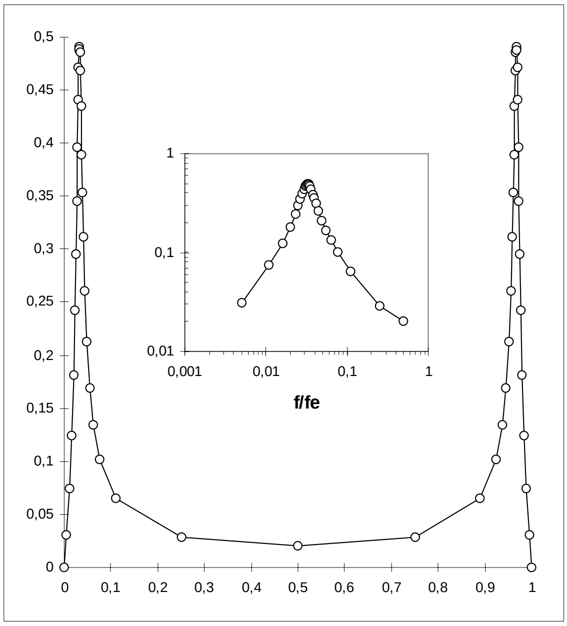


$y(n)=a\left(x(n)-x(n-1)\right)+b\,y(n-1)-c\,y(n-2)$ donne :

$$H=a\left(1-e^{-j\omega T_e}\right)+b\,He^{-j\omega T_e}-c\,He^{-j2\omega T_e}$$

$$H=\frac{a\left(1-e^{-j\omega T_e}\right)}{1-be^{-j\omega T_e}+ce^{-j2\omega T_e}}=\frac{a\left(1-cos\,\omega T_e\right)+ja\,sin\,\omega T_e}{1-b\,cos\,\omega T_e+c\,cos\,2\omega T_e+j\left(b\,sin\,\omega T_e-c\,sin\,2\omega T_e\right)}$$





$y(n)$=0,0386 $x(n)$ - 0,0386 $x(n$-1) - 1,881 $y(n$-1) - 0,921 $y(n$-1)

$$\underset{\omega T_e \to 0}{H} = \frac{ja\omega T_e}{1-b+jb\omega T_e + c(1-j\omega T_e)^2} = \frac{ja\omega T_e}{1-b+c+j\omega T_e(b-2c)-c\omega^2 T_e^2}$$

En remplaçant a, b et c par leur valeurs :

$$a = \frac{1}{1+Q\omega_0 T_e + \dfrac{Q}{\omega_0 T_e}} \qquad b = \frac{1+\dfrac{2Q}{\omega_0 T_e}}{1+Q\omega_0 T_e + \dfrac{Q}{\omega_0 T_e}} \qquad c = \frac{\dfrac{Q}{\omega_0 T_e}}{1+Q\omega_0 T_e + \dfrac{Q}{\omega_0 T_e}}$$

il vient :

$$\underset{\omega T_e \to 0}{H} = \frac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$