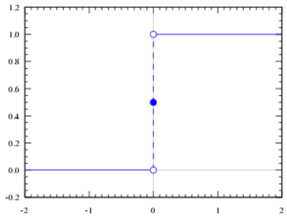
Transformée de Laplace

Dans la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, les propriétés de la transformée de Laplace, concernant la linéarité et la transformée de la dérivée, offrent un moyen de résoudre certaines d'entre elles. Cette technique est un outil pratique pour les ingénieurs.

1. Principe



Soit u(t) la fonction d'Heaviside$si\ t < 0 \Rightarrow u(t) = 0, sinon\ u(t) = 1.$

Laplace transforme une fonction temporelle f(t).u(t) en une fonction complexe F(p) avec $p \in$ C.

$$F(p) = \mathcal{L}[(f(t).u(t)] = \int_0^{\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

Les fonctions de base ont été pré-calculées et recensées dans les tables de transformées de Laplace.

2. Propriétés

- **Linéarité :** $\mathcal{L}[(a.f(t) + b.g(t)).u(t)] = a.\mathcal{L}[f(t).u(t)] + b.\mathcal{L}[g(t).u(t)]$
- **Transformée d'une dérivée :**

$\mathcal{L}[f^{'}(t).u(t)] = p.\mathcal{L}[f(t).u(t)] - f(0)$
$\mathcal{L}[f^{''}(t).u(t)] = p^2.\mathcal{L}[f(t).u(t)] - p.f(0) - f'(0)$
$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t).u(t)\right] = p^n.\mathcal{L}[f(t).u(t)] - p^{n-1}.f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

- **Intégration**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t).dt\right\} = \frac{1}{p}.\mathcal{L}[f(t).u(t)] + \frac{f(0)}{P} = \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0)}{P}$$

- **Valeur finale**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.F(p)$$

- **Valeur initiale**

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{p\to\infty} p.F(p)$$

- **Convolution**

$\mathcal{L}[(f * g).u(t)] = \mathcal{L}[f(t).u(t)].\mathcal{L}[g(t).u(t)] = F(p).G(p)$

3. Application aux équations différentielles linéaires

Résoudre l'équation différentielle suivante : $\sum_{i=0}^{n} a_i.f^{(i)} = \varphi$
1ère étape : appliquer la transformation de Laplace à cette égalité.

$\sum_{i=0}^{n} a_i.f^{(i)} = \mathcal{L}\{\varphi.u(t)\} \Rightarrow \boldsymbol{F(p) = \mathcal{L}\{f(t).u(t)\}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}\{\varphi.u(t)\} + \sum_{i=1}^{n} a_i.\sum_{j=1}^{i} p^{i-j}.f^{(j-1)}(0)}}{\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} a_i.p^i}}$,

Les $f^{(k)}(0)$ conditions initiales.
2ème étape : retrouver $f(t)$ en utilisant la transformation inverse sur $F(p)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j}.\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{pt}.F(p).d(p)$$

Où γ est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que γ soit supérieur à la partie réelle de toute singularité de F(p).

Ce calcul direct peut être difficile excepté quand $F(p)$ est **une somme de transformées de Laplace classiques** pré-calculés et recensées dans un tableau appelé tableau de transformées de Laplace (voir annexe).

4. Exemple

On cherche à résoudre :

$f^{(2)}(t) + 4.f(t) = \sin(2t)$. Les conditions initiales sont $f(0) = 0$ et $f^{'}(O) = 0$.

On notera $\varphi(t) = \sin(2t)$.

1ère étape

Le tableau de transformées de Laplace donne $\mathcal{L}\{\varphi(t).u(t)\} = \frac{2}{p^2+4}$

L'équation devient :

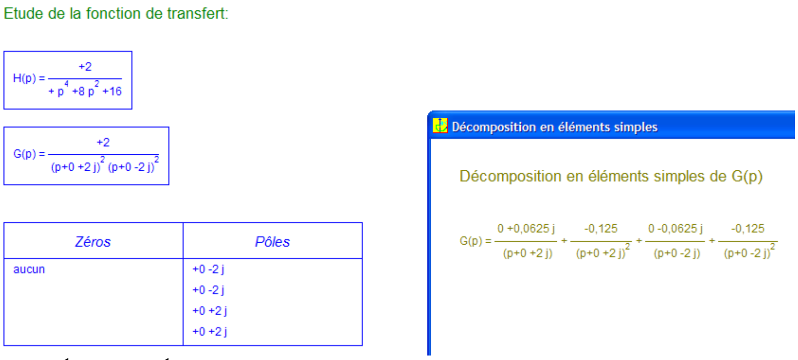
$$p^2.\mathcal{L}\{f(t).u(t)\} - p.f(0) - f^{(1)}(0) + 4.\mathcal{L}\{f(t).u(t)\} = \mathcal{L}\{\varphi(t).u(t)\}$$

On en déduit :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t).u(t)\} = \frac{2}{(p^2+4)^2}$$

2ème étape

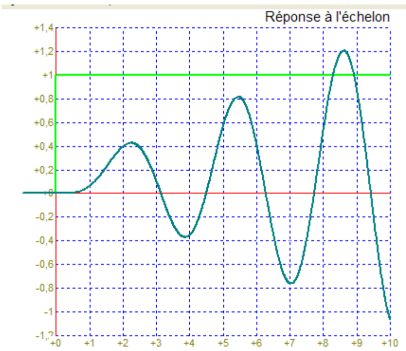
Retrouvons $f(t)$ en appliquant la transformée de Laplace inverse. Ici $F(p)$ est une fonction rationnelle qu'il faut d'abord décomposer en éléments simples. Le logiciel de mathématiques H(P) (http://artic.ac-besancon.fr/reseau_stl/FTP_STL/Hp2.zip) donne

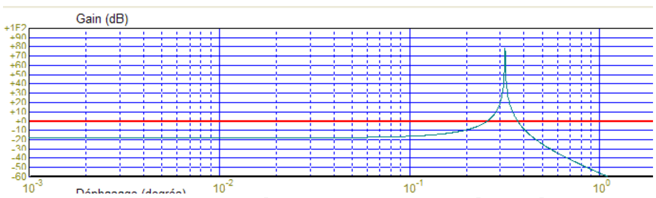


$$\frac{2}{(p^2+4)^2} = \frac{\frac{1}{16j}}{p-2j} - \frac{\frac{1}{16j}}{p+2j} - \frac{\frac{1}{8}}{(p+2j)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{(p-2j)^2} = \frac{\frac{1}{4.1}}{p^2+4} - \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{(p+2j)^2} + \frac{1}{(p-2j)^2}\right)$$

Toutes ces différentes fractions figurent dans le tableau de transformées de Laplace donné en annexe et permet d'écrire de suite :

$$f(t) = \frac{1}{8}.\sin(2t) - \frac{1}{8}.\left(\mathrm{te}^{-2\mathrm{jt}} + \mathrm{te}^{-2\mathrm{jt}}\right) = \frac{1}{8}.\sin(2t) - \frac{t}{4}.\cos(2t)$$





Essai harmonique - Lieu de Bode

Annexe1

n°	Transformée de Laplace	Signal
1	1	$\delta(t)$
2	$\frac{1}{p}$	$u(t)$
3	$\frac{1}{p^2}$	t
4	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n entier $n \geq 1$
5	$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
6	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$
7	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$
8	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$
9	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1-\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$
10	$\frac{1}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$t-(\tau_1+\tau_2)+\frac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\left(\tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$
11	$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{t}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$
12	$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$
13	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)^2}$	$t-2\tau+(t+2\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}$
14	$\frac{1}{1+\frac{2\lambda}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}e^{-\lambda\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{(1-\lambda^2)}\ \omega_0 t\right)$ $0<\lambda<1$
15	$\frac{1}{p\left(1+\frac{2\lambda}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}e^{-\lambda\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{(1-\lambda^2)}\ \omega_0 t+\varphi\right)$ $\varphi = Arc\cos($
16	$\frac{1}{p^2\left(1+\frac{2\lambda}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$	$t-\frac{2\lambda}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}}e^{-\lambda\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{(1-\lambda^2)}\ \omega_0 t+2\varphi\right)$

n°	Transformée de Laplace	Signal
17	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$\frac{1}{A}\left[\tau_1(\tau_3-\tau_2)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2(\tau_1-\tau_3)e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\tau_3(\tau_2-\tau_1)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right]$ $A=(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)$
18	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$1-\frac{1}{A}\left[\tau_1^2(\tau_3-\tau_2)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2^2(\tau_1-\tau_3)e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\tau_3^2(\tau_2-\tau_1)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right]$
19	$\frac{1}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$t-(\tau_1+\tau_2+\tau_3)+\frac{1}{A}\left[\begin{matrix}\tau_1^3(\tau_3-\tau_2)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2^3(\tau_1-\tau_3)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\\+\tau_3^3(\tau_2-\tau_1)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\end{matrix}\right]$
20	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)^2}$	$\frac{1}{(\tau_2-\tau_1)^2}\tau_1\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)+\frac{t}{\tau_2(\tau_2-\tau_1)}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
21	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)^2}$	$1-\frac{\tau_1^2}{(\tau_1-\tau_2)^2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\left[\frac{t}{(\tau_1-\tau_2)}+\frac{\tau_2(2\tau_1-\tau_2)}{(\tau_2-\tau_1)^2}\right]e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
22	$\frac{1}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)^2}$	$t-(2\tau_2+\tau_1)-\frac{\tau_1^3}{(\tau_1-\tau_2)^2}e^{\frac{t}{\tau_1}}-\frac{3\tau_1\tau_2^2-2\tau_2^3}{(\tau_1-\tau_2)^2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ $-\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}te^{-\frac{t}{\tau_2}}$
23	$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad n\geq 1$
24	$\frac{p}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^3}(\tau-t)e^{-\frac{t}{\tau}}$
25	$\frac{p}{1+\frac{2\lambda}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}e^{-\lambda\omega_0 t}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\lambda^2}+\varphi\right)$ $\varphi=\pi-\mathrm{Arc}\cos\lambda$
26	$\frac{1+ap}{1+\tau p}$	$\frac{a}{\tau}\left(\delta(t)+\frac{(\tau-a)}{a\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
27	$\frac{1+ap}{p(1+\tau p)}$	$1+\frac{(a-\tau)}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
28	$\frac{1+ap}{p^2(1+\tau p)}$	$t+a-\tau-(a-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}$

n°	Transformée de Laplace	Signal
29	$\dfrac{1+ap}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\dfrac{1}{\tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)}\left[\tau_2(\tau_1-a)e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_1(\tau_2-a)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$
30	$\dfrac{1+ap}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$1+\dfrac{1}{\tau_2-\tau_1}\left[(\tau_1-a)e^{-\frac{t}{\tau_1}}-(\tau_2-a)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$
31	$\dfrac{1+ap}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$t+(a-\tau_1-\tau_2)+\dfrac{\tau_1(\tau_1-a)}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\dfrac{\tau_2(\tau_2-a)}{\tau_2-\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_2}}$
32	$\dfrac{1+ap}{(1+\tau p)^2}$	$\left(\dfrac{(\tau-a)}{\tau^3}t+\dfrac{a}{\tau^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$
33	$\dfrac{1+ap}{p(1+\tau p)^2}$	$1+\left(\dfrac{(a-\tau)}{\tau^2}t-1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$
34	$\dfrac{1+ap}{p^2(1+\tau p)^2}$	$t+a-2\tau+\left[\left(1-\dfrac{a}{\tau}\right)t+2\tau-a\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$
35	$\dfrac{1+ap}{1+\dfrac{2\lambda}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$	$\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sqrt{1-2a\lambda\omega_0+a^2\omega_0^2}.e^{-\lambda\omega_0 t}.\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}t+\varphi\right)$ si $a\lambda\omega_0\le 1$ alors $\varphi=\mathrm{Arc}\tan\dfrac{a\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}}{1-a\lambda\omega_0}$ si $a\lambda\omega_0>1$ alors $\varphi=\pi+\mathrm{Arc}\tan\dfrac{a\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}}{1-a\lambda\omega_0}$
36	$\dfrac{1+ap}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$\dfrac{1}{A}\left[(\tau_1-a)(\tau_3-\tau_2)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+(\tau_2-a)(\tau_1-\tau_3)e^{-\frac{t}{\tau_2}}+(\tau_3-a)(\tau_2-\tau_1)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right]$ $A=(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)$
37	$\dfrac{1+ap}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$1+\dfrac{1}{A}\left[\tau_1(\tau_2-\tau_3)(\tau_1-a)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2(\tau_3-\tau_1)(\tau_2-a)e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\tau_3(\tau_1-\tau_2)(\tau_3-a)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right]$
38	$\dfrac{1+ap}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(1+\tau_3 p)}$	$t+(a-\tau_1-\tau_2-\tau_3)+\dfrac{1}{A}\left[\tau_1^2(\tau_2-\tau_3)(a-\tau_1)e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2^2(\tau_3-\tau_1)(a-\tau_2)e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\tau_3^2(\tau_1-\tau_2)(a-\tau_3)e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right]$

Annexe 2: Décomposition en éléments simples

Théorème — Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(x)$ irréductible, alors si Q admet la factorisation

$$Q = (x - z_1)^{n_1}(x - z_2)^{n_2}...(x - z_p)^{n_p}$$

Alors F admet la décomposition unique en éléments simples suivante

$$F = \frac{P}{Q} = T + \frac{a_1}{(x-z_1)} + \frac{a_2}{(x-z_1)^2} + ... + \frac{a_{n1}}{(x-z_1)^{n_1}} + \frac{b_1}{(x-z_2)} + \frac{b_2}{(x-z_2)^2} + ... + \frac{b_{n2}}{(x-z_2)^{n_2}} + ... + \frac{w_1}{(x-z_p)} + \frac{w_2}{(x-z_p)^2} ... + \frac{w_{np}}{(x-z_p)^{n_p}}$$

Où les a_i, b_i,...., wi sont des nombres complexes.

Note: Pour des raisons de simplicité d'écriture on peut aussi noter

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T + \frac{a_{11}}{(x-z_1)} + \frac{a_{12}}{(x-z_1)^2} + ... + \frac{a_{1n1}}{(x-z_1)^{n_1}} + \frac{a_{21}}{(x-z_2)} + \frac{a_{22}}{(x-z_2)^2} + ... + \frac{a_{2n2}}{(x-z_2)^{n_2}} + ... + \frac{a_{p1}}{(x-z_p)} + \frac{a_{p2}}{(x-z_p)^2} ... + \frac{a_{pn_p}}{(x-z_p)^{n_p}}$$

Où les a_{ij} sont des nombres complexes.

Exemples de décompositions

L'existence d'une décomposition étant établie, la difficulté réside dans les techniques pour déterminer les différents coefficients. Ces techniques sont applicables dans le corps des complexes ou dans le corps des réels dès que le polynôme Q est produit de facteurs du premier degré. Dans un souci de lisibilité, les exemples sont ici donnés avec des coefficients réels.

Pôles de degré un

Étude d'un cas simple : Soit $F(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Cette fraction admet deux pôles simples 1 et -1 donc $Q(x) = (x-1)(x+1)$.

On en déduit que F peut s'écrire sous la forme :

$$F(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Il s'agit de déterminer A et B. Une méthode qui est toujours réalisable consiste à réduire au même dénominateur le membre de droite de la décomposition et à identifier les coefficients des numérateurs. Cette méthode n'est pas très efficace car elle demande la résolution d'un nombre d'équations correspondant au nombre de coefficients à déterminer. On peut réduire grandement le travail en éliminant, par une multiplication judicieuse, tous les coefficients sauf un. Ainsi dans notre exemple en multipliant par (x-1), on obtient

$$(x-1)\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x+1)} = A + (x-1)\frac{B}{(x+1)}$$

En posant alors x= 1, il vient A= 1/2

Puis, en multipliant F(x) par (x+1) et en posant x= -1, il vient B= -1/2 puisque

$$(x+1)\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} = B + (x+1)\frac{A}{(x-1)}$$

La fonction *F* se décompose alors en

$$F(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{(x-1)} - \frac{1/2}{(x+1)}$$

Cas plus complexe : De même, prenons la fonction rationnelle : $F(x) = \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}$
Par factorisation du polynôme bicarré et par utilisation des identités remarquables, on peut l'écrire

$$F(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

qui se décompose en

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Pour trouver le coefficient A, il suffit de multiplier les deux membres par *x - 1* puis de remplacer x par 1

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-2)(x+2)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{C(x-1)}{x-2} + \frac{D(x-1)}{x+2}$$

$$\frac{1+3}{(1+1)(1-2)(1+2)} = A = -\frac{2}{3}$$

De même pour trouver B, il suffit de multiplier par *x + 1* et de remplacer *x* par -1

$$\frac{-1+3}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} = B = \frac{1}{3}$$

Pour C, il suffit de multiplier par *x - 2* et de remplacer *x* par 2

$$\frac{2+3}{(2-1)(2+1)(2+2)} = C = \frac{5}{12}$$

et pour D, on multiplie par *x + 2* et on remplace *x* par -2

$$\frac{-2+3}{(-2-1)(-2+1)(-2-2)} = D = -\frac{1}{12}$$

Donc

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{-2/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+1} + \frac{5/12}{x-2} + \frac{-1/12}{x+2}$$

Existence d'un pôle de degré supérieur à un

Pour une fonction rationnelle de la forme

$$\frac{\bullet}{(x+2)(x+3)^5}$$

(Où « $\bullet$ » est un polynôme quelconque de degré inférieur à 5, la décomposition en fractions partielles aura comme allure

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{E}{(x+3)^4}+\frac{F}{(x+3)^5}.$$

La détermination des coefficients *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* s'opère en effectuant le changement de variable *y* = *x* + 3(autre méthode que précédemment mais qui conduit au même résultat final). La fraction s'écrit alors

$$\frac{P(y)}{(y-1)y^5}$$

La division de *P(y)* par *y - 1* suivant les puissances croissantes nous donne alors

$$P(y)=(y-1)(F+Ey+Dy^2+Cy^3+By^4)+Ay^5$$